THEOREME DE THALES

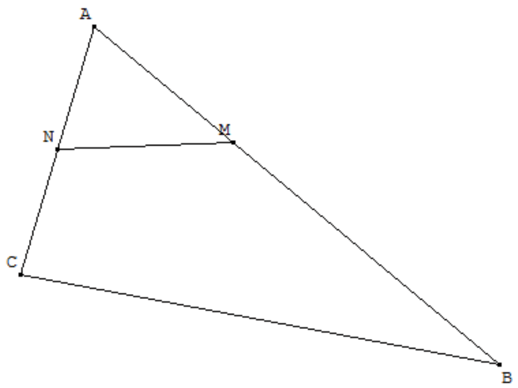
I) Théorème de Thalès dans un triangle

1) Configuration

On considère un triangle ABC, tel que M est un point du côté [AB] et N est un point du côté [AC]

On associe deux à deux les côtés des triangles ABC et AMN :

Côtés du triangle ABC	[AB]	[AC]	[BC]
Côtés du triangle AMN	[AM]	[AN]	[MN]

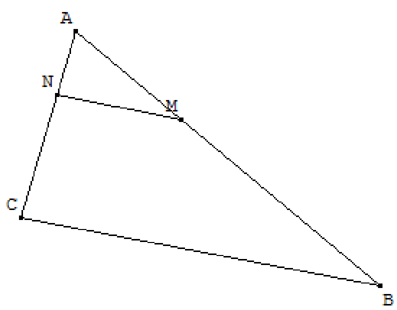


Exemple : Le côté associé au côté (BC] est le côté {MN]

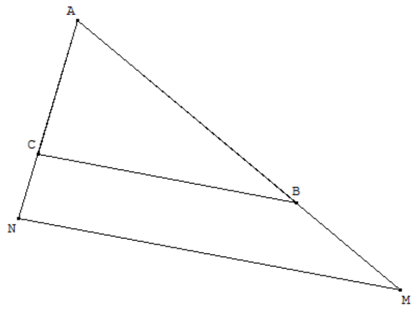
2) Enoncé :

On admet le Théorème suivant :

Soit un triangle ABC tel que M ∈ [AB] et N ∈ [AC].
Si (MN) // (BC) alors $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$



Rq : Les longueurs du triangle AMN et les longueurs associées du triangle ABC sont proportionnelles.



Rq : Si M et N Appartiennent respectivement aux demi-droites [AB) et [AC), avec toujours (MN) // (BC), les égalités de Thalès restent vraies.

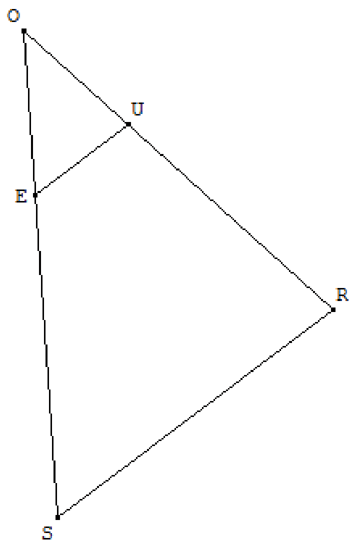
II) Applications du théorème de Thalès.

1) Calcul d'une longueur.

On considère la figure ci-contre pour laquelle

- Les points O,E et S et les points O, U et R sont alignés.
- OU = 3cm , OE = 4 cm , OR = 10 cm et RS = 9 cm
- Les droites (UE) et (RS) sont parallèles.

Calculer les longueurs OS et UE



Dans le triangle OSR, U ∈ [OR],

E ∈ [OS] et (UE) // (RS)

Donc d'après le théorème de

Thalès : $\frac{OE}{OS} = \frac{OU}{OR} = \frac{EU}{SR}$

C'est à dire $\frac{4}{OS} = \frac{3}{10} = \frac{EU}{9}$

Calcul de OS :

Comme $\frac{4}{OS} = \frac{3}{10}$

Alors $3 \times OS = 4 \times 10$

Donc $OS = \frac{4\times 10}{3}$ donc $OS = \frac{40}{3}$

Calcul de EU :

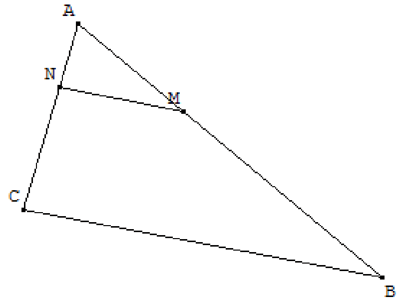
Comme $\frac{3}{10} = \frac{EU}{9}$

Alors $10 \times EU = 3 \times 9$

Donc $EU = \frac{3\times 9}{10}$ donc $EU = \frac{27}{10}$

2) Réduction ou agrandissement d'un triangle.

Df : Lorsque deux triangles sont en configuration de Thalès, le plus petit est une réduction du plus grand, et le plus grand est un agrandissement du petit.



Sur la figure ci-dessus, ABC est un triangle,

C ∈ [AN], B ∈ [AM] et (BC) // (MN) donc

le triangle AMN est une réduction du triangle ABC	le triangle ABC est un agrandissement du triangle AMN.

Propriété 1

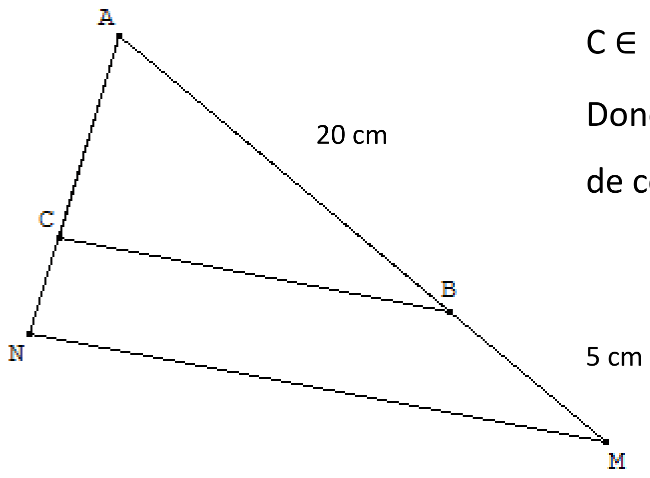
Toutes les longueurs des côtés du triangle ABC sont multipliées par un même nombre compris entre 0 et 1 $0 < k < 1$ AM = k AB, AN = k AC, MN = k BC	Toutes les longueurs des côtés du triangle AMN sont multipliées par un même nombre supérieur à 1 $k' > 1$ AB = k' AM, AC = k' AN, BC = k' MN

Propriété 2

Au cours d'un agrandissement ou d'une réduction, les mesures des angles restent inchangées :

$$\widehat{ABC} = \widehat{AMN} \quad \text{et} \quad \widehat{ACB} = \widehat{ANM}$$

Exemple :



AM = AB + BM = 20 + 5 = 25

C ∈ [AN] , B ∈ [AM] et (CB) // (NM)

Donc ABC est une réduction de AMN de coefficient $\frac{AB}{AM} = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}$

Rq : AMN est un agrandissement de ABC de coefficient $\frac{5}{4}$xf