4ème Chap G4 DISTANCE ET ANGLE DROIT.

I) Rappel sur l'inégalité triangulaire.

Prop: Dans un triangle, la longueur d'un côté est inférieure à la somme des longueurs des deux autres côtés.

En pratique, il suffit de vérifier cette inégalité seulement pour le plus grand des côtés.

Exemple:

Les triangle ayant les mesures suivantes existent-t-ils?

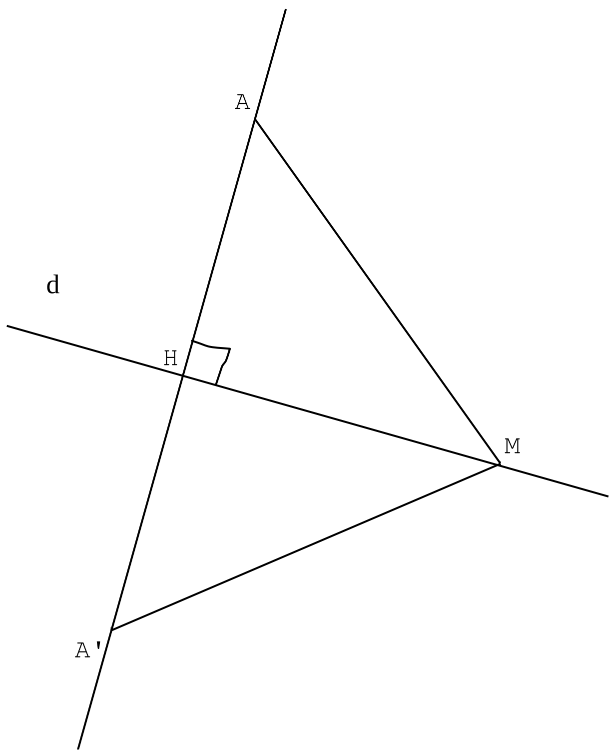
5 ; 9 ; 11 5 + 9 = 13 or 11 < 13 donc ce triangle existe

7 ; 2 ; 3 2 + 3 = 5 or 7 > 5 donc ce triangle n'existe pas.

8 ; 5 ; 3 5 + 3 = 8 donc les trois points sont alignés.

II) Distance d'un point à une droite.

Df: La distance d'un point A à une droite d est la distance entre ce point A et le pied de la perpendiculaire à d passant par A.



H est le pied de la perpendiculaire à d passant par A

AH est la distance du point A à la droite d

Prop: La distance d'un point A à une droite d est la distance la plus courte entre le point A et un point de la droite d.

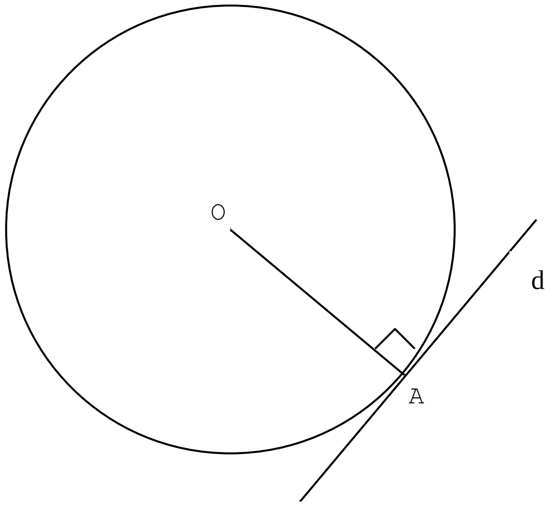
DISTANCE ET ANGLE DROIT.

Démonstration: Soit le point A' symétrique du point A par rapport à d et M un point quelconque de la droite d.

Alors AH = HA' et AM = MA'
D'après l'inégalité triangulaire, dans le triangle AA'M,
AA' < AM + A'M donc AH + HA' < AM + A'M
donc AH + AH < AM + AM donc 2 AH < 2 AM donc $\boxed{AH < AM}$

III) Tangente à un cercle.

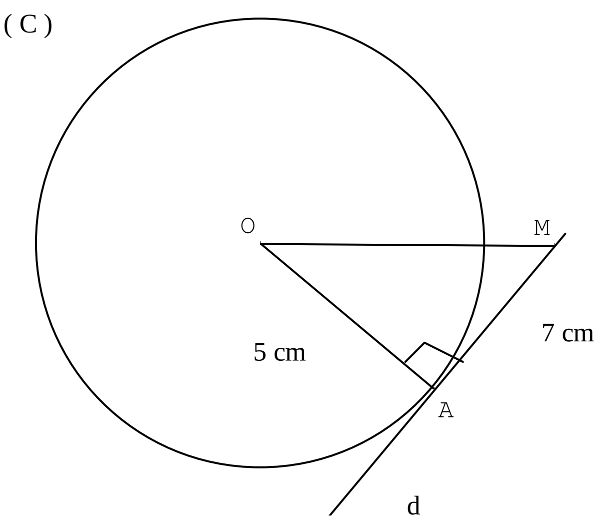
Df: Une tangente à un cercle est une droite ayant un seul point en commun avec ce cercle.



Prop: La tangente à un cercle en un point est perpendiculaire au rayon du cercle en ce point.

Exemple d'application:

Soit un cercle (C) de centre O de rayon 5 cm. Soit un point A de (C) , la tangente t à (C) passant par A et un point M de d tel que AM = 7 cm
Quelle est la longueur OM?



D est la tangente à (C) passant par A donc (OA) ⊥ d donc OAM est un triangle rectangle en A, et je peux appliquer le théorème de Pythagore:

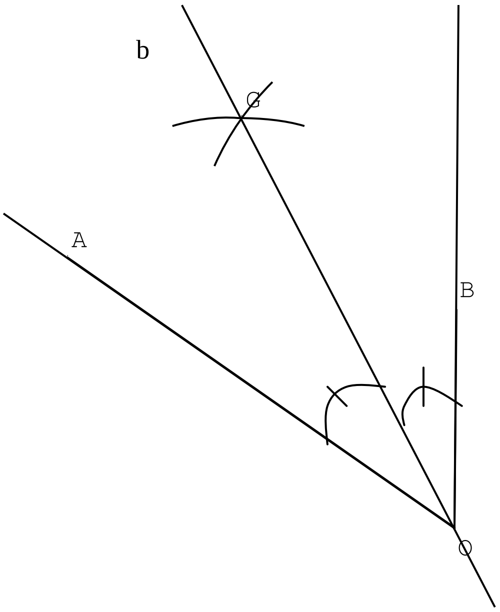
$OM^2 = OA^2 + AM^2$
donc $OM^2 = 5^2 + 7^2$
donc $OM^2 = 25 + 49$
donc $OM^2 = 74$
donc $OM = \sqrt{74}$ cm
donc $\boxed{OM \approx 8,6 \text{ cm}}$

DISTANCE ET ANGLE DROIT.

III) Bissectrices des angles d'un triangle.

1) Définition de la bissectrice d'un angle.

Df: La bissectrice d'un angle est une droite qui passe par le sommet de l'angle et qui le partage en deux angles de même mesure.

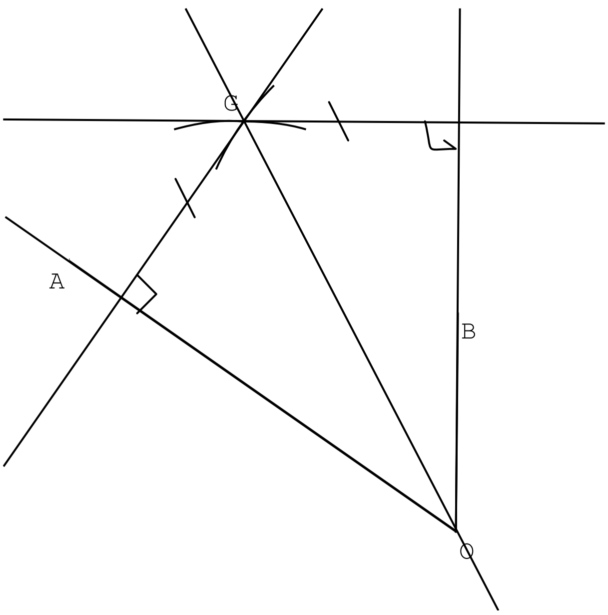


(OG) est la bissectrice de l'angle $\widehat{AOB}$ donc $\widehat{AOG} = \widehat{GOB}$

2) Propriété caractéristique de la bissectrice d'un angle.

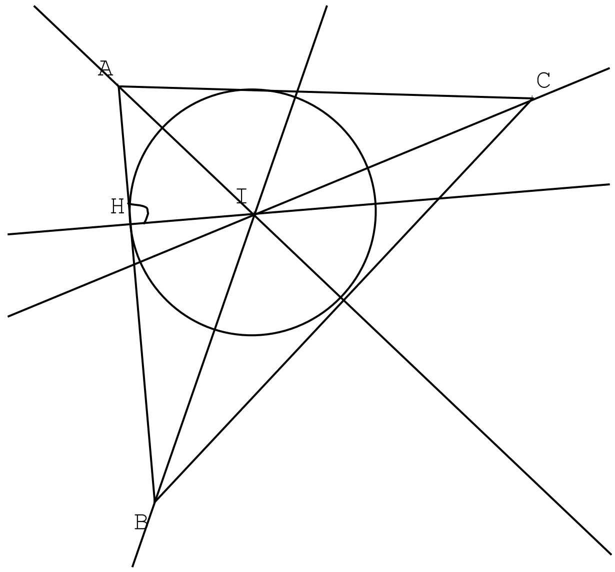
Prop: Si un point appartient à la bissectrice d'un angle, alors il est situé à égale distance des côtés de l'angle.

Partie réciproque: Si un point est équidistant des côtés d'un angle, alotrs il est situé sur la bissectrice de cet angle.



3) Point de concours des bissectrices dans un triangle.

Prop: Dans un triangle, les trois bissectrices des angles sont concourantes en un point qui est le centre du cercle inscrit dans ce triangle.



! Rq Pour construire le cercle circonscrit, on construit d'abord I le point de concours des bissectrices des angles du triangle. Le rayon du cercle est la distance entre le point I et un des côtés du triangle. Donc pour trouver le rayon du cercle, on trace une droite perpendiculaire à un des côtés passant par I, Cette droite coupe le côté en un point H qui appartient au cercle.

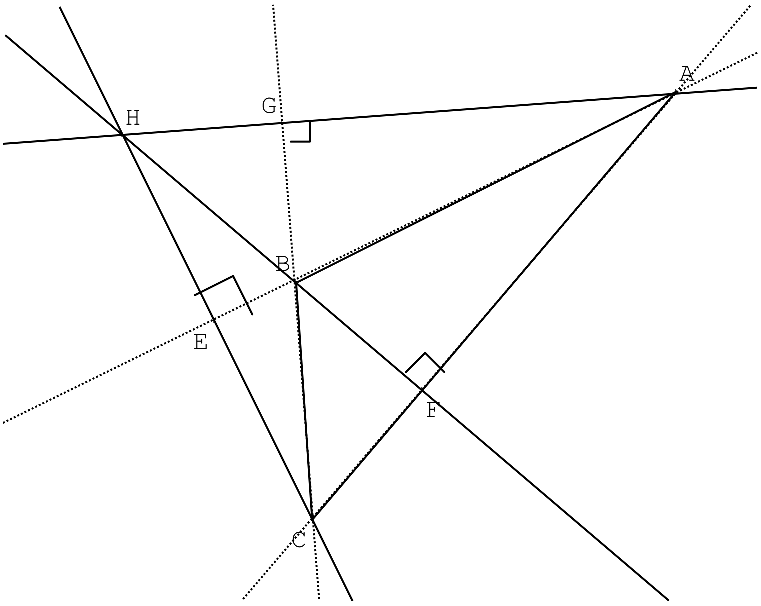
IV) Hauteurs dans un triangle.

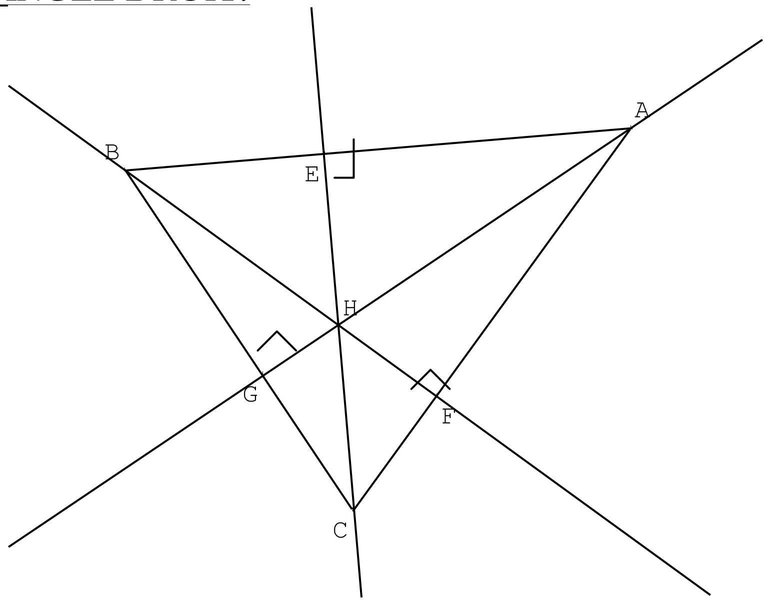
Df: Dans un triangle, une hauteur est une droite passant par un sommet et perpendiculaire au côté opposé à ce sommet.

Prop: Dans un triangle, les trois hauteurs sont concourantes en un point qui est appelé l'orthocentre du triangle.

! Rq Si le triangle est "aplati", donc deux de ses hauteurs ne passent pas par l'intérieur du triangle, et l'orthocentre se trouve à l'extérieur du triangle.

DISTANCE ET ANGLE DROIT.





Dans les deux cas de figure, dans le triangle ABC,

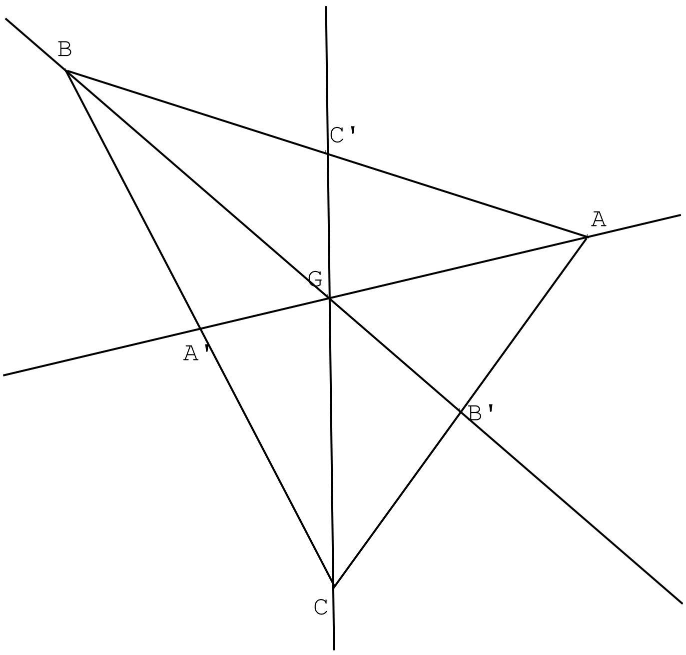
- (AE) est la hauteur issue de A, ou encore, la hauteur relative à (BC) .
- (BF) est la hauteur issue de B, ou encore, la hauteur relative à (AC)
- (CG) est la hauteur issue de C, ou encore, la hauteur relative à (AB)

H est l'orthocentre du triangle ABC

V) Médianes dans un triangle.(Rappel)

Df : Dans un triangle, une médiane est une droite qui passe par un sommet et par le milieu du côté opposé à ce sommet.

Prop: Dans un triangle, les trois médianes sont concourantes en un point qui est appelé centre de gravité du triangle.



Dans le triangle ABC,

- (AA') est la médiane issue de A ou encore, la médiane relative à [BC]
- (BB') est la médiane issue de B ou encore, la médiane relative à [AC]
- (CC') est la médiane issue de C ou encore, la médiane relative à [AB]