$4^{\text{ème}}$ Chap A3

Puissance d'un nombre.

I) Puissance d'un nombre non nul.

1) Définition.

Df: Soit a un nombre non nul, et n un entier positif.

$a^0 = 1$ $\qquad$ $a^1 = a$ $\qquad$ $a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \ldots\ldots \times a}_{\text{n facteurs}}$

$a^{-1} = \dfrac{1}{a}$ $\qquad$ $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

Exemples:

$5^0 = \boxed{1}$ $\qquad$ $6^2 = 6 \times 6 = \boxed{36}$ $\qquad$ $3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 9 \times 9 = \boxed{81}$

$(-2)^3 = (-2) \times (-2) \times (-2) = \boxed{-8}$

$5^{-1} = \boxed{\dfrac{1}{5}} = \boxed{0.2}$ $\qquad$ $2^{-4} = \dfrac{1}{2^4} = \dfrac{1}{2 \times 2 \times 2 \times 2} = \boxed{\dfrac{1}{16}}$

$(-1)^{-3} = \dfrac{1}{(-1)^3} = \dfrac{1}{(-1) \times (-1) \times (-1)} = \dfrac{1}{(-1)} = \boxed{-1}$

Rq: Les puissances ont priorité sur la multiplication et la division.

Exemples:

$$\begin{aligned}
2^5 \times 4^{-1} + 5^{-2} : 8 &= 32 \times \frac{1}{4} + \frac{1}{5^2} : 8 \\
&= \frac{4 \times 8}{4} + \frac{1}{25} \times \frac{1}{8} \\
&= 8 + \frac{1}{200} \\
&= \frac{8 \times 200}{200} + \frac{1}{200} \\
&= \frac{1600}{200} + \frac{1}{200} \\
&= \boxed{\frac{1601}{200}}
\end{aligned}$$

Puissance d'un nombre.

II) Puissances de 10.

Df : Soit n un entier positif.

$10^0 = 1$ $\quad$ $10^1 = 10$ $\quad$ $10^n = \underbrace{100\ldots0}_{\text{n zéros}}$

$$10^{-n} = \frac{1}{10^n} = \frac{1}{100\ldots0} = \underbrace{0,00\ldots01}_{\text{n zéros}}$$

Exemples:

$10^3 = \boxed{1000}$ $\quad$ $10^6 = \boxed{1000\,000}$ $\quad$ $10^9 = \boxed{\text{un milliard}}$

$10^{-1} = \dfrac{1}{10} = \boxed{0,1}$ $\quad$ $10^{-3} = \boxed{0,001}$ $\quad$ $10^{-6} = \boxed{\text{un millionième}}$

Soit n un entier positif.
Pour multiplier un nombre par 10^n, on décale sa virgule de n rang vers la droite.
Pour multiplier un nombre par 10^{-n}, on décale sa virgule de n rang vers la gauche.

Exemples

$5,3 \times 10^2 = 5,3 \times 100 = \boxed{530}$

$841,3 \times 10^{-2} = 841,3 \times 0,01 = \boxed{8,413}$

III) Formules.

Attention, il n'existe pas de formule liant les puissances avec les additions et les soustractions. On respecte seulement les priorités.
Exemple: $10^5 + 10^3 = 100000 + 1000 = \boxed{101000}$

Puissance d'un nombre.

Par contre:

$4^3 \times 4^2 = 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 4^5 \quad (4^{3+2})$

$\dfrac{4^3}{4^2} = \dfrac{4 \times 4 \times 4}{4 \times 4} = 4^1 \quad (4^{3-2})$

$(4^3)^2 = 4^3 \times 4^3 = 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 4^6 \quad (4^{3 \times 2})$

$4^3 \times 5^3 = 4 \times 4 \times 4 \times 5 \times 5 \times 5 = 4 \times 5 \times 4 \times 5 \times 4 \times 5 = (4 \times 5)^3$

$\dfrac{4^3}{5^3} = \dfrac{4 \times 4 \times 4}{5 \times 5 \times 5} = \left(\dfrac{4}{5}\right)^3$

Prop: Soient a et b deux nombres non nuls et n et p deux entiers relatifs.

$\boxed{1}$ $a^n \times a^p = a^{n+p}$ $\quad$ $\boxed{2}$ $\dfrac{a^n}{a^p} = a^{n-p}$ $\quad$ $\boxed{3}$ $(a^n)^p = a^{n \times p}$

$\boxed{4}$ $a^n b^n = (ab)^n$ $\quad$ $\boxed{5}$ $\dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$

Exemples:

Mettre sous la forme d'une seule puissance d'un nombre.

$7^3 \times 7^5 = 7^{3+5} = \boxed{7^8}$ formule 1

$\dfrac{(-6)^4}{(-6)^7} = (-6)^{4-7} = \boxed{(-6)^{-3}}$ formule 2

$\dfrac{10^5}{10^{-8}} = 10^{5-(-8)} = 10^{5+8} = \boxed{10^{13}}$ formule 2

$(11^{-5})^{-3} = 11^{-5 \times (-3)} = \boxed{11^{15}}$ formule 3

$5^{-4} \times 3^{-4} = (5 \times 3)^{-4} = \boxed{15^{-4}}$ formule 4

$\dfrac{18^7}{9^7} = \left(\dfrac{18}{9}\right)^7 = \boxed{2^7}$ formule 5

Puissance d'un nombre.

IV) Ecriture scientifique d'un nombre.

Prop: Un nombre décimal peut s'écrire d'une infinité de façons sous la forme du produit d'un nombre par une puissance de 10.

Exemple:

$$0{,}00729 = 0{,}0729 \times 10^{-1} = 0{,}729 \times 10^{-2} = 7{,}29 \times 10^{-3}$$
$$= 72{,}9 \times 10^{-4} = 729 \times 10^{-5} = 7290 \times 10^{-6} \text{ ....etc...}$$

Df: L'écriture scientifique d'un nombre décimal est son unique écriture sous la forme du produit d'un nombre compris entre 1, inclus, et 10, exclus, par une puissance de 10.

Exemple:

$$0{,}00052 = \boxed{5{,}2 \times 10^{-4}} \qquad 475{,}56 = \boxed{4{,}7556 \times 10^{2}}$$

Exercices d'application: Mettre sous la forme d'une écriture scientifique:

$$245 \times 10^{-7} = 2{,}45 \times 10^{2} \times 10^{-7} = 2{,}45 \times 10^{2-7} = 2{,}45 \times 10 - 5$$

$$0{,}000823 \times 10^{19} = 8{,}23 \times 10^{-4} \times 10^{19} = 8{,}23 \times 10^{-4+19}$$
$$= \boxed{8{,}23 \times 10^{15}}$$

$$0{,}056 \times 10^{-10} \times 125 \times (10^{3})^{5} = 5{,}6 \times 10^{-2} \times 10^{-10} \times 1{,}25 \times 10^{2} \times 10^{15}$$
$$= 5{,}6 \times 1{,}25 \times 10^{-2-10+2+15}$$
$$= \boxed{7 \times 10^{5}}$$

$$\frac{450 \times 10^{21} \times 0{,}00063 \times (10^{-3})^{-4}}{8100 \times 10^{15}} = \frac{450 \times 0{,}00063}{8100} \times \frac{10^{21} \times 10^{12}}{10^{15}}$$
$$= 3{,}5 \times 10^{-9} \times 10^{33-15}$$
$$= 3{,}5 \times 10^{-9} \times 10^{18}$$
$$= \boxed{3{,}5 \times 10^{9}}$$

Puissance d'un nombre.

V) Ordre de grandeur.

Prop: Tout nombre non nul positif est compris entre deux puissances de 10 consécutives.

Exemples

$A = 7,06 \times 10^{5}$ $\qquad 10^{5} < A < 10^{6}$

$B = 1576,41 \times 10^{-11} = 1,57641 \times 10^{3} \times 10^{-11} = 1,57641 \times 10^{-8}$

$10^{-8} < B < 10^{-7}$

VI) Problèmes utilisant des puissances de 10.

La vitesse de la lumière est d'environ 350 000 km par seconde.
Sachant qu'une année-lumière (1 al) est la distance parcourue par la lumière en une année (365 jours environ), calculer en km la distance qui nous sépare de l'étoile la plus proche de notre galaxie, Proxima du Centaure , située à 4 al de notre terre. Donner un résultat approché en écriture scientifique.

$4 \times 350\,000 \times 3600 \times 24 \times 365 = 4,4 \times 10^{13}$ km

environ 44 000 milliards de km!