$4^{ème}$ Chap A2 CALCUL AVEC DES NOMBRES RELATIFS EN ECRITURE FRACTIONNAIRE

# I) Quotients égaux.

## 1) Propriété de base.

Prop: Le quotient de deux nombres relatifs ne change pas si on multiplie ( ou si l'on divise ) ces deux nombres par un même nombre relatif différent de zéro.

a, b et c étant trois nombres relatifs avec b et c non nuls,

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{a \times c}{b \times c} \quad \text{et} \quad \frac{a}{b} = \frac{a : c}{b : c}}$$

Exemples

$$\frac{-4.5}{6} = \frac{-4.5 : 1.5}{6 : 1.5} = -\frac{3}{4} \qquad \frac{-2.5}{-1.5} = \frac{-2.5 \times (-2)}{-1.5 \times (-2)} = \frac{5}{3}$$

## 2) Simplifier une fraction.

Pour simplifier une fraction,

1- on cherche un diviseur commun ( le plus grand, si possible ) au numérateur et au dénominateur,
2- on exprime chacun des deux nombres sous la forme d'un produit utilisant ce diviseur commun,
3- on fait disparaître le diviseur commun au numérateur et au dénominateur.

Exemples:

$$\frac{-15}{18} = \frac{-5 \times 3}{6 \times 3} = \frac{-5}{6} = \boxed{-\frac{5}{6}}$$

$$\frac{-27}{-63} = \frac{27}{63} = \frac{9 \times 3}{9 \times 7} = \boxed{\frac{3}{7}}$$

## 3) Réduire deux fractions au même dénominateur.

Pour réduire deux fractions au même dénominateur,

1- on cherche un multiple commun ( le plus petit, si possible) aux dénominateurs des deux fractions,
2- on multiplie le dénominateur et le numérateur de chaque fraction par un même nombre, nécessaire pour obtenir ce multiple commun aux dénominateurs des deux fractions.

Exemples:

| | | |
|---|---|---|
| $6 \text{ et } \frac{1}{2}$ | $\frac{22}{15} \text{ et } \frac{5}{3}$ | $\frac{20}{9} \text{ et } \frac{23}{12}$ |
| $\frac{6}{1} \text{ et } \frac{1}{2}$ | $\frac{22}{15} \text{ et } \frac{5 \times 5}{3 \times 5}$ | $\frac{20 \times 4}{9 \times 4} \text{ et } \frac{23 \times 3}{12 \times 3}$ |
| $\frac{6 \times 2}{1 \times 2} \text{ et } \frac{1}{2}$ | $\boxed{\frac{22}{15} \text{ et } \frac{25}{15}}$ | $\boxed{\frac{80}{36} \text{ et } \frac{69}{36}}$ |
| $\boxed{\frac{12}{2} \text{ et } \frac{1}{2}}$ | | |

## 4) Propriété des produits en croix.

Propriété : Si deux nombres relatifs en écriture fractionnaire sont égaux, alors leurs produits en croix sont égaux

Propriété réciproque: Si les produits en croix de deux nombres relatifs en écriture fractionnaire sont égaux, alors ces deux nombres sont égaux.

Si a, b, c et d sont des nombres relatifs avec b et d non nuls,

$\boxed{\text{Si } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ alors } ad = bc}$ $\boxed{\text{Si } ad = bc \text{ alors } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}}$

On utilise ces propriétés pour démontrer que deux nombre relatifs sont égaux ou non égaux.

Exemples

♦ $\frac{-5}{3}$ et $\frac{9}{-7}$ sont- ils égaux?

$-5 \times (-7) = 35$ et $3 \times 9 = 27$ donc $-5 \times (-7) \neq 3 \times 9$

donc $\frac{-5}{3} \neq \frac{9}{-7}$

♦ $\frac{14.5}{25}$ et $\frac{-11.6}{-20}$ sont -ils égaux ?

$14.5 \times (-20) = -290$ et $25 \times (-11.6) = -290$

donc $14.5 \times (-20) = 25 \times (-11.6)$

donc $\frac{14.5}{25} = \frac{-11.6}{-20}$

## II) Comparaison ( Rappel )

Pour comparer des fractions, on utilise successivement les procédés suivants:

1) Comparer les fractions à 0
2) Comparer les fractions à 1
3) Calculer les valeurs exactes ( si elles existent ) de chaque fraction en écriture décimale.
4) Simplifier les fractions si possible
5) Mettre les fractions au même dénominateur ( quelquefois au même numérateur.)

Exemples: Comparer

♦ $\frac{3}{5}$ et $\frac{5}{8}$ : $\frac{3}{5} = 0.6$ et $\frac{5}{8} = 0.625$ donc $\boxed{\frac{3}{5} < \frac{5}{8}}$

♦ $\frac{54}{57}$ et $\frac{112}{107}$ $\frac{54}{57} < 1$ et $\frac{112}{107} > 1$ donc $\boxed{\frac{54}{57} < \frac{112}{107}}$

♦ $\frac{-14}{79}$ et $\frac{-84}{-199}$ $\frac{-14}{79} < 0$ et $\frac{-84}{-199} < 0$ donc $\boxed{\frac{-14}{79} < \frac{-84}{-199}}$

♦ $\frac{12}{14}$ et $\frac{25}{35}$ $\qquad \frac{12}{14} = \frac{2 \times 6}{2 \times 7} = \frac{6}{7} \qquad \frac{25}{35} = \frac{5 \times 5}{7 \times 5} = \frac{5}{7}$

or $6 > 5$ donc $\boxed{\frac{12}{14} > \frac{25}{35}}$

♦ $\frac{6}{55}$ et $\frac{9}{77}$ $\qquad \frac{6}{55} = \frac{6 \times 7}{55 \times 7} = \frac{42}{385}$ et $\frac{9}{77} = \frac{9 \times 5}{77 \times 5} = \frac{45}{385}$

or $42 < 45$ donc $\frac{42}{385} < \frac{45}{385}$ donc $\boxed{\frac{6}{55} < \frac{9}{77}}$

## III) Addition et soustraction

Règle: Pour additionner ou soustraire deux nombres relatifs en écriture fractionnaire,

- ♦ On fait le bilan des signes pour chacune des fractions
- ♦ On les met au même dénominateur
- ♦ On additionne ou soustrait les numérateurs
- ♦ On garde le dénominateur commun
- ♦ On donne le résultat sous la forme d'une fraction simplifiée.

Si a, b et c sont des nombres relatifs avec $c \neq 0$,
$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$ et $\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$

Exemples:

♦ $\frac{-2}{7} + \frac{9}{7} = \frac{-2+9}{7} = \frac{7}{7} = \boxed{1}$

♦ $\frac{3.6}{1.4} - \frac{5.7}{-1.4} = \frac{3.6}{1.4} + \frac{5.7}{1.4} = \frac{3.6+5.7}{1.4} = \frac{9.3}{1.4} = \boxed{\frac{93}{14}}$

♦ $\frac{6.5}{-11} + \frac{-10}{-11} = \frac{6.5+(-10)}{-11} = \frac{-3.5}{-11} = \frac{35}{110} = \frac{7 \times 5}{5 \times 22} = \boxed{\frac{7}{22}}$

♦ $\frac{-7}{5} - \frac{-2}{15} = \frac{-7}{5} + \frac{2}{15} = \frac{-7 \times 3}{5 \times 3} + \frac{2}{15} = \frac{-21}{15} + \frac{2}{15} = \frac{-21+2}{15}$
$= \frac{-19}{15} = \boxed{-\frac{19}{15}}$

♦ $\frac{5}{8} + \frac{7}{-6} = \frac{5}{8} - \frac{7}{6} = \frac{5 \times 3}{8 \times 3} - \frac{7 \times 4}{6 \times 4} = \frac{15}{24} - \frac{28}{24} = \boxed{-\frac{13}{24}}$

- $\dfrac{2}{7} + \dfrac{4}{9} = \dfrac{2 \times 9}{7 \times 9} + \dfrac{4 \times 7}{9 \times 7} = \dfrac{18}{63} + \dfrac{28}{63} = \boxed{\dfrac{46}{63}}$

## IV) Multiplication.

Règle: Pour multiplier deux nombres relatifs en écriture fractionnaire,

- On détermine le signe du résultat en utilisant la règle des signes
- On multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux, sans calculer dans un premier temps.
- On simplifie avant de calculer
- On donne le résultat sous la forme d'une fraction simplifiée.

Si a, b, c et d sont des nombres relatifs avec $b \neq 0$ et $d \neq 0$,

$\dfrac{a}{b} \times \dfrac{c}{d} = \dfrac{ac}{bd}$ et $a \times \dfrac{c}{d} = \dfrac{ac}{d}$ ( b = 1 , donc n'est pas écrit)

Exemples

- $\dfrac{5}{4} \times \dfrac{-3}{7} = -\dfrac{5 \times 3}{4 \times 7} = \boxed{-\dfrac{15}{28}}$
- $\dfrac{2.5}{-4} \times \dfrac{-3}{2} = \dfrac{2.5 \times 3}{4 \times 2} = \dfrac{7.5}{8} = \dfrac{75}{80} = \dfrac{5 \times 15}{5 \times 16} = \boxed{\dfrac{15}{16}}$
- $5 \times \dfrac{-3}{13} = -\dfrac{5 \times 3}{13} = \boxed{-\dfrac{15}{13}}$
- $\dfrac{15}{-64} \times \dfrac{-8}{-25} = -\dfrac{15 \times 8}{64 \times 25} = \dfrac{-3 \times 5 \times 8}{8 \times 8 \times 5 \times 5} = -\dfrac{3}{8 \times 5} = \boxed{-\dfrac{3}{40}}$

## IV) Division

### 1) Inverse d'un nombre non nul.

Df: Deux nombres relatifs inverses sont deux nombres relatifs tels que leur produit est égal à 1.

Si a est un nombre relatif non nul, $\boxed{a \times \text{inva} = 1}$

Rq: Il n'existe aucun nombre qui, multiplié à 0 donne 1,
donc 0 n'a pas d'inverse

Exemple:

$2 \times 0.5 = 1$ donc 2 et 0.5 sont inverses l'un de l'autre

$7 \times 0.125 = 1$ donc 8 est l'inverse de 0.125 et 0.125 est l'inverse de 8.

Prop: Si a est un nombre relatif non nul, alors l'inverse de a est $\frac{1}{a}$

$$\boxed{\text{inv } a = \frac{1}{a}}$$

Exemple:

L'inverse de 3 est $\frac{1}{3}$ $\quad$ $\text{Inv}(-5) = \frac{1}{-5} = \boxed{-\frac{1}{5}}$

$\text{Inv}(-6+2) = \frac{1}{-6+2} = \frac{1}{-4} = \boxed{-\frac{1}{4}} = \boxed{-0.25}$

Prop: Si a et b sont deux nombres relatifs non nuls,
alors l'inverse de $\frac{a}{b} = \frac{b}{a}$ $\quad$ $\boxed{\text{inv } \frac{a}{b} = \frac{b}{a}}$

Exemples:

$\text{inv }(\frac{3}{7}) = \boxed{\frac{7}{3}}$ $\quad$ $\text{inv}(\frac{-4}{1.3}) = \frac{1.3}{-4} = -\frac{1.3}{4} = \boxed{-\frac{13}{40}} = \boxed{-0.325}$

## 2) Division.

Prop: Diviser par un nombre non nul revient à multiplier par son inverse.

Si a et b sont deux nombres relatifs avec $b \neq 0$,

$$\boxed{a : b = \frac{a}{b} = a \times \text{inv } b = a \times \frac{1}{b}}$$

♦ $-5 : 0.5 = -5 \times \text{inv } 0.5 = -5 \times \dfrac{1}{0.5} = -5 \times 2 = \boxed{-10}$

♦ $\dfrac{9}{0.125} = 9 \times \dfrac{1}{0.125} = 9 \times 8 = \boxed{72}$

Prop: cas particulier:
Si a, b, c et d représentent des nombres relatifs avec b, c et d non nuls,

$$\boxed{\dfrac{a : b}{c : d} = \dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \dfrac{a}{b} \times \dfrac{d}{c}}$$

Règle: Pour diviser une fraction par une fraction non nulle,

- On détermine le signe du résultat en utilisant la règle des signes
- On multiplie la première fraction par l'inverse de la deuxième.
- On donne le résultat sous la forme d'une fraction simplifiée.

Exemples

♦ $\dfrac{4}{5} : \dfrac{8}{7} = \dfrac{4}{5} \times \dfrac{7}{8} = \dfrac{4 \times 7}{5 \times 8} = \dfrac{4 \times 7}{5 \times 2 \times 4} = \boxed{\dfrac{7}{10}}$

♦ $\dfrac{\frac{9}{5}}{\frac{3}{-25}} = -\dfrac{9}{5} \times \dfrac{25}{3} = -\dfrac{3 \times 3 \times 5 \times 5}{5 \times 3} = \boxed{-15}$

♦ $\dfrac{5}{\frac{7}{8}} = 5 \times \dfrac{8}{7} = \dfrac{5 \times 8}{7} = \boxed{\dfrac{40}{7}}$

Attention! ne pas confondre avec l'exemple suivant

♦ $\dfrac{\frac{5}{7}}{8} = \dfrac{5}{7} \times \dfrac{1}{8} = \dfrac{5}{7 \times 8} = \boxed{\dfrac{5}{56}}$

Rq: Un nombre et son inverse ont le même signe

Ne pas confondre opposé et inverse: $\text{opp } 2 = -2$

$\text{inv } 2 = \dfrac{1}{2} = 0.5$

## V) Mélanges d'opérations.

Règle: On doit toujours respecter les priorités de calcul.

Exemple:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} + \frac{3}{5} : \left(2 \times \frac{5}{3} - 4\right) &= \frac{1}{2} + \frac{3}{5} : \left(\frac{10}{3} - \frac{4 \times 3}{3}\right) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{3}{5} : \left(\frac{10}{3} - \frac{12}{3}\right) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{3}{5} : \left(-\frac{2}{3}\right) \\
&= \frac{1}{2} - \frac{3}{5} \times \frac{3}{2} \\
&= \frac{1}{2} - \frac{9}{10} \\
&= \frac{1 \times 5}{2 \times 5} - \frac{9}{10} \\
&= \frac{5}{10} - \frac{9}{10} \\
&= -\frac{4}{10} \\
&= \boxed{-\frac{2}{5}}
\end{aligned}$$

## VI) Problème avec opérations:

Règles:

- Le total fait toujours 1
- Produit, multiplier, de, du, d', des, se traduisent par l'opération x.
- Enlever, remise, différence, ôter, se traduisent par –
- Ajouter, et, somme, se traduisent par +
- Diviser, quotient, partager en part égales, de traduisent par :