CALCULS AVEC DES NOMBRES RELATIFS

I) Addition et soustraction de nombres relatifs. Somme algébrique.

Dans la pratique, on se ramène toujours à une somme de nombres relatifs en appliquant la propriété suivante:

Prop: Soustraire un nombre revient à ajouter son opposé

Et on prend pour principe de ne plus écrire le signe "plus" d'un nombre positif.

Il s'ensuit la règle de simplification d'écriture donnée par l'exemple suivant:

$-(-3) = +(+3) = 3 \qquad +(-3) = -(+3) = -3$

Après avoir simplifié l'écriture d'une suite d'addition et de soustraction de nombres relatifs, on obtient une expression numérique que l'on nomme Somme algébrique.

Exemple:

$-(+6)+(-4)-(-5)+(+10) = -6-4+5+10$

On utilise alors un mode de calcul sur le modèle de " je perds, je gagne " (des points, par exemple…)

"je perds 6 points, puis j'en perds 4, puis j'en gagne 5, puis j'en gagne 10.

On peut alors ajouter les nombres négatifs entre eux et ajouter les nombres positifs entre eux.

$-6-4+5+10 = -10+15 = \boxed{5}$

! Rq: si on ajoute deux termes opposés, on obtient zéro.

Exemple: $-5-11+7+11 = -5+7 = \boxed{2}$

Dans un calcul plus compliqué, où il y a des sommes algébriques entre parenthèses, on commence toujours par calculer d'abord l'intérieur des parenthèses.

Exemple:

$$\begin{aligned} -7-(5-8)+(-14-3)+(-9) &= -7-(-3)+(-17)-9 \\ &= -7+3-17-9 \\ &= 3-7-17-9 \\ &= 3-33 = \boxed{-30} \end{aligned}$$

II) Multiplication de deux nombres relatifs.

1) Calcul du produit de deux nombres relatifs.

♦ Le produit de deux nombres de même signe est positif

Exemples:

$(+3)\times(+5) = +(3\times 5) = +15 = \boxed{15}$

$(-3)\times(-5) = +(3\times 5) = +15 = \boxed{15}$

♦ Le produit de deux nombres de signes différents est négatif

Exemples:

$(+3)\times(-5) = -(3\times 5) = \boxed{-15}$

$(-3)\times(+5) = -(3\times 5) = \boxed{-15}$

2) Propriétés de base de la multiplication de nombres relatifs.

a) Changement d'ordre des facteurs.

♦ Un produit ne change pas lorsque l'on modifie l'ordre de ses facteurs.

a et b étant deux nombres relatifs, $\boxed{ab = ba}$

Exemple: $(-6)\times(+2) = (+2)\times(-6) = \boxed{-12}$

b) Multiplication par zéro.

♦ La multiplication d'un nombre relatif par zéro, donne toujours zéro

a étant un nombre relatif, $\boxed{0 \times a = a \times 0 = 0}$

Exemple: $(-4562) \times 0 = \boxed{0}$

c) Multiplication par 1.

♦ La multiplication d'un nombre relatif par 1 le laisse inchangé.

a étant un nombre relatif, $\boxed{1 \times a = a \times 1 = a}$

Exemple: $1 \times (-56.23) = \boxed{-56.23}$

d) Multiplication par – 1.

♦ Multiplier un nombre relatif par – 1 revient à prendre l'opposé de ce nombre.

a étant un nombre relatif,

$\boxed{(-1) \times a = a \times (-1) = \text{opposé de } a = -a}$

Exemples:

- $(-1) \times (-7) = \boxed{7}$
- $(+6.5) \times (-1) = \boxed{-6.5}$

3) Signe d'un produit de plusieurs facteurs.

♦ Lorsque l'on multiplie plusieurs nombres relatifs non nuls entre eux,

- S'il y a un nombre pair de facteurs négatifs, alors le produit est positif.
- S'il y a un nombre impair de facteurs négatifs, alors le produit est négatif.

Exemples:

- $(-0.5) \times 2 \times (-3) \times (-1)$ est négatif, parce que c'est un produit qui comporte 3 facteurs négatifs
- $14 \times (-1.5) \times 5 \times (-4.1) \times (-2) \times (-1)$ est positif, car c'est un produit qui comporte 4 facteurs négatifs.

III) Division de deux nombres relatifs.

1) Définition du quotient d'un nombre relatif par un nombre relatif non nul.

Df: a et b désignent deux nombres relatifs, avec $b \neq 0$

Le quotient de a par b, noté a : b ou $\frac{a}{b}$, est le nombre relatif qui, multiplié par b, donne a

Exemple: $(-35) : 7$ est le nombre qui, multiplié par 7 donne – 35.
Il s'agit du nombre – 5

$$(-35) : 7 = \frac{-35}{7} = \boxed{-5}$$

! **$b \neq 0$** Le diviseur ne peut pas être zéro.
On ne sait pas diviser par zéro.

2) Calcul du quotient d'un nombre relatif par un nombre relatif non nul.

- Le quotient de deux nombres relatifs de même signe est positif.
- Le quotient de deux nombres relatifs de signes différents est négatif.

Exemples:

$$\frac{-7}{-2} = \frac{7}{2} = \boxed{3.5} \qquad \frac{-7}{2} = \frac{7}{-2} = \boxed{-3.5}$$

Certains quotients ne peuvent pas s'écrire de manière exacte sous forme décimale, on les écrit alors sous forme fractionnaire.

$$\frac{-10}{-3} = \boxed{\frac{10}{3}} \qquad \frac{-10}{3} = \boxed{-\frac{10}{3}}$$

3) Propriétés de base de la division.

a) Un diviseur ne peut pas être nul.

! Il est impossible de diviser un nombre par zéro.

b) Division d'un nombre par zéro.

♦ La division de zéro par un nombre relatif non nul donne zéro.

Si b est un nombre relatif non nul, $\boxed{\dfrac{0}{b} = 0}$

Exemples: $\dfrac{0}{524} = \dfrac{0}{-3} = \dfrac{0}{1} = 0$

c) Division par 1.

♦ La division d'un nombre relatif par 1 le laisse inchangé.

Si a est un nombre relatif, $\boxed{\dfrac{a}{1} = a}$

Exemple: $\dfrac{-7.3}{1} = \boxed{-7.3}$

d) Division par – 1.

♦ Diviser un nombre relatif par – 1, revient à prendre l'opposé de ce nombre.

Si a est un nombre relatif, $\boxed{\dfrac{a}{-1} = \text{opposé de } a = -a}$

Exemples : $\dfrac{-145}{-1} = 145$ $\dfrac{78}{-1} = \boxed{-78}$

e) Division d'un nombre relatif non nul par lui même.

♦ La division d'un nombre relatif non nul par lui même donne 1.

Si b est un nombre relatif non nul, $\boxed{\dfrac{b}{b} = 1}$

Exemple: $\dfrac{-2}{-2} = \dfrac{100}{100} = \dfrac{-0.5}{-0.5} = 1$

4) Inverse d'un nombre relatif non nul.

♦ Df: a étant un nombre relatif non nul, l'in verse de a est le quotient de 1 par a. C'est aussi le nombre qui, multiplié à a, donne 1. On le note $\frac{1}{a}$

$$\boxed{\text{inverse de } a \times a = \frac{1}{a} \times a = 1}$$

! Il ne faut pas confondre inverse et opposé d'un nombre relatif.

Exemple: $\text{inv}(-2) = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2} = -0.5$ $\quad$ $\text{opp}(-2) = 2$

$\text{inv}(7) = \frac{1}{7}$ $\quad$ $\text{opp}(7) = -7$

♦ Prop: Diviser par un nombre relatif non nul, revient à multiplier par l'inverse de ce nombre.

a et b étant des nombres relatifs avec $b \neq 0$, $\boxed{\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}}$

Exemple:

$$\frac{-2}{0.001} = -2 \times \frac{1}{0.001} = -2 \times 1000 = -2000$$

5) Valeurs approchées du quotient de deux nombres relatifs non nuls.

Lorsque le calcul d'un quotient ne peut pas s'écrire de manière exacte sous une forme décimale, on en donne une valeur approchée.

Exemple: $\frac{25}{-7}$ est un nombre négatif dont la distance à zéro est égale à $\frac{25}{7}$ qui n'est pas un nombre décimal: sa partie décimale est infinie.

$\frac{25}{7} = 3.571428571428571428......$

On peut alors encadrer sa valeur exacte par deux valeurs approchées, une par défaut, et une par excès.

$3.5 < \frac{25}{7} < 3.6$ au dixième près

$3.57 < \frac{25}{7} < 3.58$ au centième près

$3.571 < \frac{25}{7} < 3.572$ au millième près…

- 3.58 est une valeur approchée de $\frac{25}{7}$ par excès au centième près (ou à 0.01 près, ou à $\frac{1}{100}$ près.)

Mais l'arrondi de $\frac{25}{7}$ au centième près est 3.57

3.57 est aussi la troncature de $\frac{25}{7}$ au centième près.

- 3.571 est à la fois la troncature, l'arrondi et la valeur approchée par défaut de $\frac{25}{7}$ au millième près.

Rq: Attention, pour comparer des nombres négatif, l'ordre est inversé.

$3.571 < \frac{25}{7} < 3.572$ au millième près… mais

$-3.572 < -\frac{25}{7} < -3.571$

IV) Calcul d'expressions comportant plusieurs sortes d'opérations avec des nombres relatifs.

On respecte les priorités vues en ciquièmes.

Exemple:

1) Calculer les expressions algébriques

a) $E = -3 + 3 \times (-12) - (-15) : 3$
b) $F = (-0.2) \times (-3.5) \times 2 \times (-1) \times (-5)$

2) Donner une valeur approchée de $\frac{E}{F}$ par excès, au dixième près.

Solution:

1) a) $E = -3 + 3 \times (-12) - (-15) : 3$
$E = -3 + (-36) - (-5)$
$E = -3 - 36 + 5$
$E = -39 + 5$
$\boxed{E = -34}$

b) $F = (-0.2) \times (-3.5) \times 2 \times (-1) \times (-5)$
$F = 0.2 \times 3.5 \times 2 \times 1 \times 5$
$F = 0.7 \times 10$
$\boxed{F = 7}$

2) $\frac{E}{F} = \frac{-34}{7} = -\frac{34}{7}$ or $4.8 < \frac{34}{7} < 4.9$ donc $-4.9 < \frac{E}{F} < -4.8$

donc une valeur approchée au dixième près, par excès de $\frac{E}{F}$ est $\boxed{-4.8}$